Journal of Algebra 335 (2011) 49–73

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Algebra

www.elsevier.com/locate/jalgebra

Algèbres graduées avec symétries

Naoufel Battikh

Département de mathématiques, Institut préparatoire aux études d'ingénieur de Nabeul, Université de Carthage, Campus universitaire 8000, Nabeul, Tunisie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 13 janvier 2010
Disponible sur Internet le 6 avril 2011
Communiqué par Michel Broué

Mots-clés :
Formes différentielles non commutatives

ABSTRACT

In this paper we define the notion of "graded algebra with symmetries". This notion is a generalization of the extended differential forms. We prove that for a graded algebra with symmetries T, we associate a subalgebra Ω^* which generalizes the noncommutative differential forms. Using this algebra Ω^*, we can define the Hochschild and cyclic homologies, cup i-products and the Steenrod squares.

1. Introduction

Dans cet article, on introduit la notion « d'algèbre graduée avec symétries » (AGS en abrégé). Pour un anneau commutatif unitaire R, une algèbre graduée avec symétries est la donnée d'un foncteur covariant

$$T : \mathcal{F}in \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{R}}.$$

La catégorie $\mathcal{F}in$ étant celle dont les objets sont les ensembles $\{0, 1, \dots n\}$ et les morphismes sont les applications quelconques. La catégorie $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ est celle des R-algèbres commutatives unitaires. Pour une R-algèbre unitaire A, l'algèbre des formes différentielles étendues $T^*(A)$ (cf. [2]) sera présentée comme un exemple parmi d'autres d'algèbres graduées avec symétries. A une AGS, on associe une sous-algèbre Ω^* qui généralise l'algèbre des formes différentielles non commutatives $\Omega^*(A)$ (cf. [2] ou [7]). Sur l'algèbre Ω^*, on définit un opérateur b de degré -1 et un opérateur κ qui vérifient les propriétés suivantes

Adresse e-mail : naoufelbattikh@yahoo.fr.

0021-8693/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jalgebra.2011.03.017

$$db + bd = 1 - \kappa$$
$$\kappa^n = 1 + b\kappa^n d$$
$$\kappa^{n+1} = 1 - db$$
$$\left(\kappa^n - 1\right)\left(\kappa^{n+1} - 1\right) = 0.$$

Ces propriétés ont été remarquées par Cuntz et Quillen (cf. [3]) dans le cadre des formes différentielles non commutatives. En particulier, les notions d'homologies cycliques et de Hochschild peuvent être étendues à une algèbre Ω^* associée à une AGS T.
On montre aussi que pour une AGS T, le groupe symétrique opère à droite sur Ω^*. Ainsi Ω^* est un $\mathcal{S}$-mod (cf. [9]), on peut donc associer une opérade à Ω^*, et ce en utilisant le foncteur libre décrit dans [9].
On peut aussi, en utilisant les méthodes détaillées dans [1], donner dans le cadre des AGS, une construction des cup i-produits ainsi qu'une construction explicite des carrées de Steenrod (cf. [10]).

L'article est présenté de la façon suivante : On commence par donner un rappel sur les formes différentielles non commutatives. Ensuite on définit les algèbres graduées avec symétries, on en donne quelques exemples et on montre certaines propriétés des AGS, analogues à celles des formes différentielles non commutatives. Dans le paragraphe suivant on étudie l'action des groupes symétriques sur une sous-algèbre Ω^* associée à une AGS T. Dans le dernier paragraphe, on montre que la sous-algèbre Ω^* associée à une AGS T est une algèbre graduée mixte. Une algèbre graduée mixte étant une algèbre différentielle graduée (Λ^*, d), munie d'une deuxième différentielle $b : \Lambda^* \longrightarrow \Lambda^{*-1}$ vérifiant, pour tous $\omega_1 \in \Lambda^n$ et $\omega_2 \in \Lambda^p$, l'identité suivante :

$$\omega_2\omega_1 = (-1)^{np}\kappa^p(\omega_1\omega_2) - (-1)^{n(p+1)}b\kappa^p(\omega_1\, d\omega_2).$$

L'opérateur de degré 0 κ étant défini par l'identité

$$db + bd = 1 - \kappa.$$

L'auteur tient à remercier Max Karoubi dont les remarques ont été déterminantes pour l'élaboration de ce travail.

2. Rappel

Rappelons brièvement les définitions des formes différentielles non commutatives données dans [2] et [7]. Soient R un anneau commutatif unitaire et A une R-algèbre unitaire. Les formes différentielles étendues de degré n sont les éléments du produit tensoriel de R-modules

$$T^n(A) = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$$

($n+1$ facteurs). Sur $T^*(A) = \oplus_{n \geqslant 0} T^n(A)$ on définit un opérateur de carré nul

$$D : T^n(A) \longrightarrow T^{n+1}(A)$$

par la formule suivante :

$$\begin{aligned} &D(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &\quad = 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - a_0 \otimes 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \cdots + (-1)^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 \end{aligned}$$

et un produit

$$T^n(A) \otimes T^p(A) \longrightarrow T^{n+p}(A)$$

par la formule

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)(b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p.$$

Pour toutes formes $w \in T^n(A)$ et $\theta \in T^p(A)$, la différentielle D vérifie l'identité de Leibniz

$$D(w\theta) = D(w)\theta + (-1)^n w D(\theta).$$

On a en outre une action à droite du groupe symétrique S_{n+1} sur $T^n(A)$. En effet, en identifiant S_{n+1} à l'ensemble des permutations de $\{0, 1, \ldots, n\}$, l'action est définie par la formule suivante :

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)^\sigma = a_{\sigma(0)} \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}.$$

Pour une R-algèbre A on pose $\Omega^0(A) = A$ et $\Omega^1(A)$ le noyau du morphisme de R-modules

$$\begin{aligned} A \otimes A &\longrightarrow A \\ x \otimes y &\longrightarrow xy. \end{aligned}$$

Le produit tensoriel étant celui des R-modules. En fait le R-module $\Omega^1(A)$ est aussi un A-bimodule et les formes différentielles non commutatives de degré n sont les éléments du produit tensoriel de A-modules

$$\Omega^n(A) = \Omega^1(A) \otimes \Omega^1(A) \otimes \cdots \otimes \Omega^1(A) \quad \bigl(n \text{ facteurs de } \Omega^1(A)\bigr).$$

La somme $\Omega^*(A) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Omega^n(A)$ est une algèbre graduée de manière évidente, le produit de deux formes étant obtenu en juxtaposant les produits tensoriels. Considérons l'homomorphisme de R-modules

$$d : \Omega^0(A) \longrightarrow \Omega^1(A)$$

défini par la formule

$$d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1.$$

On a alors l'isomorphisme suivant

$$\begin{aligned} A \otimes A/R &\longrightarrow \Omega^1(A) \\ x \otimes \bar{y} &\longrightarrow x\,dy. \end{aligned}$$

L'ensemble $\Omega^n(A)$ des formes différentielles non commutatives de degré n s'identifie alors au produit tensoriel de R-modules

$$A \otimes A/R \otimes \cdots \otimes A/R \quad (n \text{ facteurs } A/R).$$

Une forme différentielle non commutative de degré n s'écrit donc comme combinaison linéaire de termes de la forme

$$a_0 da_1 \cdots da_n$$

et le morphisme d s'étend aux formes de degré n de $\Omega^*(A)$ par la formule

$$d(a_0 da_1 \cdots da_n) = da_0 da_1 \cdots da_n.$$

Ce morphisme est de carré nul et vérifie, pour toutes formes $w \in \Omega^n(A)$ et $\theta \in \Omega^p(A)$, l'identité de Leibniz :

$$d(w\theta) = dw\,\theta + (-1)^n w\,d\theta.$$

L'algèbre différentielle graduée $\Omega^*(A)$ est incluse de manière évidente dans $T^*(A)$. D'autre part, pour tout $n \geqslant 0$, on a un opérateur de projection

$$J : T^n(A) \longrightarrow \Omega^n(A)$$

défini par la formule suivante

$$J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 da_1 \cdots da_n.$$

L'opérateur J est un morphisme de R-modules qui commute avec les différentielles. Il convient de noter que ce morphisme n'est pas un morphisme de R-algèbres. Cependant on a la proposition suivante :

2.1. Proposition. *(Cf. [1].) Soient A est une R-algèbre commutative, $w \in T^n(A)$ et $\theta \in T^p(A)$ avec $D(\theta) = 0$. On a alors*

$$J(w\theta) = J(w)J(\theta).$$

Sur les formes différentielles étendues de degré n, on définit un produit noté #, par la formule suivante :

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \# (b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = a_0 b_0 \otimes a_1 b_1 \otimes \cdots \otimes a_n b_n.$$

Rappelons d'autre part, que si A est une R-algèbre commutative, une application

$$f : [n] \longrightarrow [m]$$

(où pour tout $p \in \mathbb{N}$, $[p]$ désigne l'ensemble $\{0, 1, \ldots, p\}$), induit un morphisme

$$f_* : T^n(A) \longrightarrow T^m(A)$$

défini par la correspondance

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m$$

où pour tout $j \in [m]$

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}(\{j\}) \text{ est vide} \\ \prod_{i \in f^{-1}(\{j\})} a_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montre alors (cf. [1]) que pour toutes formes w et $\theta \in T^n(A)$, on a

$$f_*(w \,\#\, \theta) = f_*(w) \,\#\, f_*(\theta)$$

et que si $w \in T^n(A)$ et $\theta \in T^p(A)$, on a

$$w\theta = f_*(w) \,\#\, g_*(\theta).$$

L'application f étant l'inclusion de $[n]$ dans $[n+p]$ et $g : [p] \longrightarrow [n+p]$ est défini par $g(i) = i+n$. Pour alléger les notations dans ce qui suit, on notera f au lieu de f_* l'homomorphisme induit sur les formes étendues par une application $f : [n] \longrightarrow [m]$.

Rappelons aussi que sur les formes étendues de degré n on a

$$D = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \delta_i$$

où les $\delta_i : [n] \longrightarrow [n+1]$ sont les opérateurs cofaces définis par $\delta_i(j) = j$ si $i > j$ et $\delta_i(j) = j+1$ si $i \leqslant j$ et que

$$\Omega^n(A) = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker s_i$$

où les $s_i : [n] \longrightarrow [n-1]$ sont les opérateurs de codégénérescence définis par $s_i(j) = j$ si $i \geqslant j$ et $s_i(j) = j-1$ si $i < j$.

2.2. Definition. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit sur $T^n(A)$ un opérateur b de degré -1 en posant, pour une forme $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in T^n(A)$,

$$b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}.$$

Sur $T^0(A)$ on pose $b = 0$.

2.3. Remarques.

a/ L'opérateur b est égal à $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i s_i$, où pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $s_i : [n] \longrightarrow [n-1]$ est l'opérateur de codégénérescence défini précédemment et $s_n : [n] \longrightarrow [n-1]$ est défini par $s_n(j) = j$ si $j \leqslant n-1$ et $s_n(n) = 0$.

b/ Considérons $a_0 da_1 \ldots da_n \in \Omega^n(A)$. On a alors

$$b(a_0 da_1 \ldots da_n) = (-1)^{n-1} (a_0 da_1 \ldots da_{n-1} a_n - a_n a_0 da_1 \ldots da_{n-1}).$$

c/ L'homomorphisme b est de carré nul et l'homologie de Hochschild $HH_n(A)$ est égale à l'homologie du complexe $(\Omega^n(A), b)$.

2.4. Definition. Sur $\Omega^*(A)$, on définit un opérateur de degré 0 noté κ (cf. [3] et [5]) par la formule suivante :

$$\kappa(a_0 da_1 \ldots da_n) = (-1)^{n-1} da_n a_0 da_1 \ldots da_{n-1}.$$

Cet opérateur κ commute avec b et d et vérifie les identités suivantes :

$$db + bd = 1 - \kappa$$
$$\kappa^n = 1 + b\kappa^n d$$
$$\kappa^{n+1} = 1 - db$$
$$\big(\kappa^n - 1\big)\big(\kappa^{n+1} - 1\big) = 0.$$

Enfin, en posant $b_r = b(1 + \kappa + \kappa^2 + \cdots + \kappa^{r-1})$, on a la relation :

$$db_r + b_r d = 1 - \kappa^r.$$

3. Algèbres graduées avec symétries

Dans la suite, R désignera un anneau commutatif unitaire. On désignera par $\mathcal{F}in$ la catégorie dont les objets sont les ensembles $\{0, 1, \dots n\}$ qu'on notera $[n]$ et les morphismes sont les applications quelconques. On désignera par $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ la catégorie des R-algèbres commutatives unitaires.

3.1. Definition. Une algèbre graduée avec symétries (AGS en abrégé) est la donnée d'un foncteur covariant

$$T : \mathcal{F}in \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{R}}.$$

Soient n et $p \in \mathbb{N}$. Dans cet article $f_{n,p} : [n] \longrightarrow [n+p]$ désignera l'inclusion et $g_{n,p} : [p] \longrightarrow [n+p]$ est définie par $g_{n,p}(i) = i + n$. Pour toute AGS T, on a alors un morphisme

$$T\big([n]\big) \otimes T\big([p]\big) \longrightarrow T\big([n+p]\big) \otimes T\big([n+p]\big).$$

Celui-ci, composé par la multiplication dans l'algèbre $T([n+p])$, induit un accouplement

$$T\big([n]\big) \otimes T\big([p]\big) \longrightarrow T\big([n+p]\big).$$

Pour cet accouplement, on montre aisément la propriété d'associativité suivante :

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T([n]) \otimes T([p]) \otimes T([q]) \arrow[r] \arrow[d] & T([n+p]) \otimes T([q]) \arrow[d] \\
T([n]) \otimes T([p+q]) \arrow[r] & T([n+p+q])
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

3.2. Notation. Dans la suite, pour toute AGS T et tout $n \in \mathbb{N}$, on écrira T^n au lieu de $T([n])$.

3.4. Soit A une R-algèbre commutative unitaire. Notons $\mathcal{D}_R$, la catégorie dont les objets sont les ensembles $[n]$, $n \in \mathbb{N}$ et les morphismes $[n] \longrightarrow [p]$ sont les morphismes de R-modules $A^{\otimes n+1} \longrightarrow A^{\otimes p+1}$. Considérons la catégorie « linéarisée » $\mathcal{T}\mathcal{F}in$ de $\mathcal{F}in$ (notée IL dans [8]) qui a les mêmes objets que $\mathcal{F}in$ et telle que $Hom_{\mathcal{T}\mathcal{F}in}([n], [p])$ soit le R-module libre de base $Hom_{\mathcal{F}in}([n], [p])$. On a vu dans le paragraphe 2, que pour toute application $f : [n] \longrightarrow [p]$, on associe un morphisme de R-algèbres $A^{\otimes n+1} \longrightarrow A^{\otimes p+1}$. On définit donc un foncteur

$$\theta : \mathcal{TF}in \longrightarrow \mathcal{D}_R.$$

3.5. Lemme. *Pour $A = R[t]$, le foncteur $\theta : \mathcal{TF}in \longrightarrow \mathcal{D}_R$ est fidèle.*

3.6. Demonstration. Dans ce cas $A^{\otimes n+1}$ s'identifie à l'algèbre des polynômes $R[t_0, t_1, \dots, t_n]$ et l'application

$$\theta : Hom_{\mathcal{TF}in}\big([n], [p]\big) \longrightarrow Hom_R\big(R[t_0, t_1, \dots, t_n], R[u_0, u_1, \dots, u_p]\big)$$

est celle qui à toute application $f : [n] \longrightarrow [p]$, de $\mathcal{F}in$ associe le morphisme d'algèbres obtenu par changement de variables $t_i = u_{f(i)}$. Pour $n = 0$, l'application θ est injective avec une image en facteur direct. En effet $Hom_{\mathcal{TF}in}([0], [p])$ s'identifie à R^{p+1} et l'image par θ de la base canonique de R^{p+1} est formée de vecteurs indépendants dans $Hom_R(R[t_0], R[u_0, u_1, \dots, u_p])$. Puisque $Hom_R(R[t_0, t_1, \dots, t_n], R[u_0, u_1, \dots, u_p])$ contient le produit tensoriel de $(n+1)$ copies de $Hom_R(R[t_0], R[u_0, u_1, \dots, u_p])$ et que $Hom_{\mathcal{TF}in}([n], [p]) \simeq (R^{p+1})^{\otimes(n+1)}$, θ est injective pour n et p quelconques. □

Soit T un foncteur définissant une AGS. Pour tout n et $p \in \mathbb{N}$, on a donc une multiplication

$$T^n \otimes T^p \longrightarrow T^{n+p}.$$

Ce produit du type d'Alexander–Whitney, munit la somme directe de T^n d'une structure d'algèbre graduée. Considérons le morphisme

$$d : T^n \longrightarrow T^{n+1}$$

défini par

$$d = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i T(\delta_i)$$

où les δ_i sont les opérateurs cofaces définis précédemment.

3.7. Proposition. *L'algèbre $T^* = \bigoplus_{n \geqslant 0} T^n$ ainsi définie, munie de l'opérateur d est une algèbre différentielle graduée.*

3.8. Demonstration. Pour montrer que $d^2 = 0$, il suffit d'appliquer le lemme 3.5. Montrons maintenant l'identité de Leibniz. Pour tous n et $p \in \mathbb{N}$, on notera $f_{n,p}$ l'inclusion de $[n]$ dans $[n+p]$ et $g_{n,p} : [p] \longrightarrow [n+p]$. Considérons $\omega_n \in T^n$ et $\theta_p \in T^p$. On a alors

$$d(\omega_n \theta_p) = \sum_{i=0}^{n+p+1} (-1)^i T(\delta_i)\big[T(f_{n,p})(\omega_n) T(g_{n,p})(\theta_p)\big] = \sum_{i=0}^{n+p+1} (-1)^i T(\delta_i f_{n,p})(\omega_n) T(\delta_i g_{n,p})(\theta_p).$$

Pour $i \leqslant n$, on a

$$\delta_i f_{n,p} = f_{n+1,p} \delta_i \quad \text{et} \quad \delta_i g_{n,p} = g_{n+1,p}.$$

Pour $i > n$, on a

$$\delta_i f_{n,p} = f_{n,p+1} \quad \text{et} \quad \delta_i g_{n,p} = g_{n,p+1}\delta_{i-n}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} d(\omega_n\theta_p) = {} & \sum_{i=0}^{n}(-1)^i T(f_{n+1,p})T(\delta_i)(\omega_n)T(g_{n+1,p})(\theta_p) \\ & + \sum_{i=n+1}^{n+p+1}(-1)^i T(f_{n,p+1})(\omega_n)T(g_{n,p+1})T(\delta_{i-n})(\theta_p). \end{aligned}$$

Or on a

$$f_{n+1,p}\delta_{n+1} = f_{n,p+1} \quad \text{et} \quad g_{n+1,p} = g_{n,p+1}\delta_0$$

donc

$$T(f_{n+1,p})T(\delta_{n+1})(\omega_n)T(g_{n+1,p})(\theta_p) = T(f_{n,p+1})(\omega_n)T(g_{n,p+1})T(\delta_0)(\theta_p).$$

D'où

$$\begin{aligned} d(\omega_n\theta_p) = {} & \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i T(f_{n+1,p})T(\delta_i)(\omega_n)T(g_{n+1,p})(\theta_p) \\ & + \sum_{i=n}^{n+p+1}(-1)^i T(f_{n,p+1})(\omega_n)T(g_{n,p+1})T(\delta_{i-n})(\theta_p) \\ = {} & T(f_{n+1,p})\left[\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i T(\delta_i)(\omega_n)\right]T(g_{n+1,p})(\theta_p) \\ & + T(f_{n,p+1})(\omega_n)T(g_{n,p+1})\left[\sum_{r=0}^{p+1}(-1)^{n+r}T(\delta_r)(\theta_p)\right] \\ = {} & T(f_{n+1,p})(d\omega_n)T(g_{n+1,p})(\theta_p) + (-1)^n T(f_{n,p+1})(\omega_n)T(g_{n,p+1})(d\theta_p) \\ = {} & d\omega_n\theta_p + (-1)^n\omega_n d\theta_p. \qquad \square \end{aligned}$$

3.9. Exemples.

3.9.1. Soit A une R-algèbre commutative unitaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T^n = A^{\otimes n+1}$. On a vu que pour toute application $f : [n] \longrightarrow [p]$, où n et $p \in \mathbb{N}$, on associe un morphisme de R-algèbres $T^n \longrightarrow T^p$. Le foncteur T ainsi défini est une AGS.

3.9.2. Soit X un ensemble simplicial et A l'anneau simplicial défini par $A_n = R^{n+1} = Appl([n], R)$. Posons $T^n = Mor_{simp}(X, A^{\otimes n+1})$. Ce foncteur T définit une AGS qu'on note $T(X)$ et dont la cohomologie est celle de l'ensemble simplicial X (cf. [7]).

3.9.3. (Cf. [6].) Soit X un complexe simplicial pointé. On définit $SP^n(X)$ comme étant le quotient topologique de X^n par l'action naturelle du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. La limite inductive des $SP^n(X)$, notée $SP^{\infty}(X)$ est alors un monoïde topologique et on note alors $L(X)$ le symétrisé de $SP^{\infty}(X)$. Soit B^{n+1} la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. Le R-module $R \otimes L(B^{n+1})$ (produit tensoriel sur $\mathbb{Z}$) qu'on note $L(B^{n+1}, R)$ s'identifie algébriquement au R-module libre de base les éléments de B^{n+1}. Cet R-module peut être muni (cf. [4]) d'une topologie qui en fait un groupe abélien topologique. Pour un CW-complexe Y, on pose $T^n = Mor_{top}(Y, L(B^{n+1}, R))$. Le foncteur T est alors une AGS dont l'algèbre différentielle graduée associée a la même cohomologie singulière que l'espace Y.

3.10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, notons $\rho_i : [n] \longrightarrow [n]$ l'application définie par

$$\rho_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \neq i \\ j-1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Soient le morphisme $e_n = (1-\rho_n)(1-\rho_{n-1})\cdots(1-\rho_1)$ de $\mathcal{TF}in$ (1 désignant ici l'application identité), A une R-algèbre commutative unitaire et $\theta : \mathcal{TF}in \longrightarrow \mathcal{D}_R$ le foncteur défini dans 3.4. On a alors le lemme suivant :

3.11. Lemme. *On a $\theta(e_n) = J$ où J est l'opérateur de projection défini au paragraphe* 2.

3.12. Demonstration. Le cas où $n = 1$ se vérifie facilement. Soit $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \in A^{\otimes(n+2)}$. On a alors

$$\begin{aligned}\theta(e_{n+1})(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= \theta\big((1-\rho_{n+1})(1-\rho_n)\cdots(1-\rho_1)\big)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= \big(1 - T(\rho_{n+1})\big)\big(1 - T(\rho_n)\big)\cdots\big(1 - T(\rho_1)\big) \\ &\quad \times \big(T(f_{n,n+1})(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) T(g_{n,n+1})(1 \otimes a_{n+1})\big).\end{aligned}$$

Ici l'AGS T est celle des formes différentielles étendues. On a $\rho_i f_{n,n+1} = f_{n,n+1}\rho_i$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $\rho_i g_{n,n+1} = g_{n,n+1}$. On a aussi

$$T(\rho_n g_{n,n+1})(1 \otimes a_{n+1}) = T(g_{n,n+1})(1 \otimes a_{n+1}),$$
$$\rho_{n+1} f_{n,n+1} = f_{n,n+1} \quad \text{et} \quad \rho_{n+1} g_{n,n+1} = g_{n,n+1}\rho_1.$$

Donc

$$\begin{aligned}&\theta(e_{n+1})(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &\quad = \big(1 - T(\rho_{n+1})\big)\big(T(f_{n,n+1})\big[\big(1 - T(\rho_n)\big)\cdots\big(1 - T(\rho_1)\big)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)\big] \\ &\qquad \times T(g_{n,n+1})(1 \otimes a_{n+1})\big) \\ &\quad = \big(1 - T(\rho_{n+1})\big)\big(T(f_{n,n+1})\big[J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)\big]T(g_{n,n+1})(1 \otimes a_{n+1})\big) \\ &\quad = \big(1 - T(\rho_{n+1})\big)\big(J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}\big) \\ &\quad = J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1} - J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)a_{n+1} \otimes 1 \\ &\quad = J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)(1 \otimes a_{n+1} - a_{n+1} \otimes 1) \\ &\quad = J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}).\end{aligned}$$

D'où le lemme. □

En suivant le schéma tracé dans [7], on va faire le lien entre les AGS et les formes différentielles non commutatives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, considérons les opérateurs de « codégénérescence » $s_i : [n] \longrightarrow [n-1]$ définis précédemment. Pour tout foncteur T définissant une AGS et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le R-module Ω^n par

$$\Omega^n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker\big(T(s_i)\big).$$

3.13. Proposition. *Pour toute AGS T et tout $n \geqslant 0$, le morphisme $T(e_n)$ est un idempotent, à valeurs dans Ω^n qui commute avec la différentielle d.*

3.14. Demonstration. Pour tout $n \geqslant 0$, on a $\theta(e_n^2) = J^2 = J = \theta(e_n)$. Donc d'après le lemme 3.5 on a $e_n^2 = e_n$ et $T(e_n)^2 = T(e_n)$. Ceci on peut aussi le montrer directement, sans passer par le lemme 3.5, et ce en remarquant que

$$(1-\rho_i)(1-\rho_j) = (1-\rho_j)(1-\rho_i) \quad \text{si } |i-j| \geqslant 2$$

et que

$$(1-\rho_i)(1-\rho_{i-1})(1-\rho_i) = (1-\rho_i)(1-\rho_{i-1}).$$

Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on a

$$\theta(s_i e_n) = s_i J = 0.$$

Donc toujours d'après le lemme 3.5 on a $s_i e_n = 0$ et par suite $T(e_n)$ est à valeurs dans Ω^n.

Enfin on a $\theta(e_n d) = Jd = dJ = \theta(de_n)$, ce qui entraine que $T(e_n)$ commute avec la différentielle d. $\square$

3.15. Proposition. *Pour toute AGS T et tout $n \geqslant 0$, le morphisme $T(e_n)$ est inverse à gauche de l'inclusion $\varphi : \Omega^n \longrightarrow T^n$.*

3.16. Demonstration. On a $e_n = (1-\rho_n)(1-\rho_{n-1})\cdots(1-\rho_1)$. Or pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\rho_i = \delta_i s_i$. Donc on a

$$e_n = 1 + \sum_r \alpha_r s_r$$

où les α_r sont des morphismes de $\mathcal{F}in$. Donc si $\omega \in \Omega^n$, on a bien $T(e_n)(\omega) = \omega$.

Remarquons que $T(e_n)$ n'est pas un morphisme d'algèbre sur T^*. Toutefois, on a la proposition suivante. $\square$

3.17. Proposition. *Soient T une AGS, $\omega_1 \in T^n$ et $\omega_2 \in T^p$ avec $d\omega_2 = 0$. On a alors*

$$T(e_{n+p})(\omega_1\omega_2) = T(e_n)(\omega_1)T(e_p)(\omega_2).$$

3.18. Demonstration. Pour alléger les notations dans cette démonstration, et pour toute application $\varphi : [n] \longrightarrow [p]$ et tout $\omega \in T^n$, on écrira $\varphi(\omega)$ au lieu de $T(\varphi)(\omega)$. Montrons d'abord que pour tous $\omega_1 \in T^n$ et $\omega_2 \in T^p$, on a $e_{n+p}(\omega_1\omega_2) = e_{n+p}(\omega_1 e_p(\omega_2))$. Soient donc $\omega_1 \in T^n$ et $\omega_2 \in T^p$. On a

$$e_{n+p}\big(\omega_1 e_p(\omega_2)\big) = e_{n+p}\big(f_{n,p}(\omega_1)g_{n,p}(1-\rho_p)(1-\rho_{p-1})\cdots(1-\rho_1)(\omega_2)\big).$$

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p, T$ on a

$$g_{n,p}\rho_i = \rho_{i+n}g_{n,p} \quad \text{et} \quad \rho_{i+n}f_{n,p} = f_{n,p}$$

donc

$$\begin{aligned} e_{n+p}\big(\omega_1 e_p(\omega_2)\big) &= e_{n+p}(1-\rho_{n+p})(1-\rho_{n+p-1})\cdots(1-\rho_{n+1})\big[f_{n,p}(\omega_1)g_{n,p}(\omega_2)\big] \\ &= (1-\rho_{n+p})(1-\rho_{n+p-1})\cdots(1-\rho_1)(1-\rho_{n+p})(1-\rho_{n+p-1})\cdots(1-\rho_{n+1}) \\ &\quad \times \big[f_{n,p}(\omega_1)g_{n,p}(\omega_2)\big] \end{aligned}$$

et comme

$$(1-\rho_i)(1-\rho_j) = (1-\rho_j)(1-\rho_i) \quad \text{si } |i-j| \geqslant 2$$

et que pour tout $i \geqslant 2$,

$$(1-\rho_i)(1-\rho_{i-1})(1-\rho_i) = (1-\rho_i)(1-\rho_{i-1})$$

on aura

$$e_{n+p}\big(\omega_1 e_p(\omega_2)\big) = e_{n+p}(\omega_1\omega_2).$$

On peut alors supposer dans la proposition, que ω_2 est un élément de Ω^p. Soient donc $\omega_1 \in T^n$et $\omega_2 \in \Omega^p$ avec $d\omega_2 = 0$,

$$e_{n+p}(\omega_1\omega_2) = (1-\rho_{n+p})(1-\rho_{n+p-1})\cdots(1-\rho_1)\big[f_{n,p}(\omega_1)g_{n,p}(\omega_2)\big].$$

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $\rho_i f_{n,p} = f_{n,p}\rho_i$ et $\rho_i g_{n,p} = g_{n,p}$ donc

$$e_{n+p}(\omega_1\omega_2) = (1-\rho_{n+p})\cdots(1-\rho_n)\big[f_{n,p}(1-\rho_{n-1})\cdots(1-\rho_1)(\omega_1)g_{n,p}(\omega_2)\big].$$

Posons $\omega' = (1-\rho_{n-1})\cdots(1-\rho_1)(\omega_1)$. On a

$$\rho_n\big(f_{n,p}\big(\omega'\big)g_{n,p}(\omega_2)\big) = f_{n,p}\rho_n\big(\omega'\big)\rho_n g_{n,p}(\omega_2).$$

L'application $\rho_n g_{n,p} : [p] \longrightarrow [n+p]$ vérifie

$$\rho_n g_{n,p}(i) = \begin{cases} i+n & \text{si } i \neq 0 \\ n-1 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

On a donc $\rho_n g_{n,p} = g_{p+1,n-1}\delta_1$. Puisque $d\omega_2 = 0$, on a alors

$$g_{p+1,n-1}\delta_1(\omega_2) = \left(g_{p+1,n-1}\delta_0 + \sum_{i=2}^{p+1}(-1)^i g_{p+1,n-1}\delta_i\right)(\omega_2)$$

d'où

$$\begin{aligned}
&(1-\rho_n)\big(f_{n,p}\big(\omega'\big)g_{n,p}(\omega_2)\big)\\
&\quad = f_{n,p}\big(\omega'\big)g_{n,p}(\omega_2) - f_{n,p}\rho_n\big(\omega'\big)\left(g_{p+1,n-1}\delta_0 + \sum_{i=2}^{p+1}(-1)^i g_{p+1,n-1}\delta_i\right)(\omega_2)
\end{aligned}$$

or $g'\delta_0 = g$ et

$$\begin{aligned}
&(1-\rho_{n+p})\cdots(1-\rho_{n+1})\left[f_{n,p}\rho_n\big(\omega'\big)\left(\sum_{i=2}^{p+1}(-1)^i g_{p+1,n-1}\delta_i\right)(\omega_2)\right]\\
&\quad = f_{n,p}\rho_n\big(\omega'\big)(1-\rho_{n+p})\cdots(1-\rho_{n+1})\left[\left(\sum_{i=2}^{p+1}(-1)^i g_{p+1,n-1}\delta_i\right)(\omega_2)\right] = 0.
\end{aligned}$$

En effet, pour tous $2 \leqslant i \leqslant p+1$ et $r < i-1$, on a

$$\rho_{n+r}g_{p+1,n-1}\delta_i = \rho_{n+r}g_{p+1,n-1}\delta_i\delta_{r+1}s_r$$

donc $(1-\rho_{n+r})g_{p+1,n-1}\delta_i(\omega_2) = g_{p+1,n-1}\delta_i(\omega_2)$ et puisque $\rho_{n+i-1}g_{p+1,n-1}\delta_i = g_{p+1,n-1}\delta_i$ alors $(1-\rho_{n+i-1})g_{p+1,n-1}\delta_i = 0$. D'où pour tout $2 \leqslant i \leqslant p+1$,

$$(1-\rho_{n+p})\cdots(1-\rho_{n+1})g_{p+1,n-1}\delta_i(\omega_2) = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&(1-\rho_{n+p})\cdots(1-\rho_{n+1})(1-\rho_n)\big(f_{n,p}\big(\omega'\big)g_{n,p}(\omega_2)\big)\\
&\quad = f_{n,p}\big(\omega'\big)(1-\rho_{n+p})\cdots(1-\rho_{n+1})g_{n,p}(\omega_2) - f_{n,p}\rho_n\big(\omega'\big)(1-\rho_{n+p})\cdots(1-\rho_{n+1})g_{n,p}(\omega_2)\\
&\quad = f_{n,p}(1-\rho_n)\big(\omega'\big)(1-\rho_{n+p})\cdots(1-\rho_{n+1})g_{n,p}(\omega_2).
\end{aligned}$$

Comme pour tout $i \geqslant 1$, on a $\rho_{n+i}g_{n,p} = g_{n,p}\rho_i$ alors

$$e_{n+p}(\omega_1\omega_2) = e_n(\omega_1)e_p(\omega_2). \qquad \square$$

Soit T une AGS. Considérons le morphisme $\beta = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s_i$ de $\mathcal{TF}in$. L'application s_n étant définie par

$$s_n(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < n \\ 0 & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-2$, on a

$$\theta(s_i\beta e_n) = s_i b J.$$

Le morphisme $b : \Omega^n(A) \longrightarrow \Omega^{n-1}(A)$ étant celui défini 2.2. Or $s_i b J = 0$ donc, d'après le lemme 3.5 $s_i\beta e_n = 0$. Ce qui implique que $T(\beta)$ envoie Ω^n sur Ω^{n-1}. On notera encore b le morphisme $T(\beta)$. Remarquons qu'on peut voir que $T(\beta)$ envoie Ω^n sur Ω^{n-1} sans passer par le lemme 3.5 et ce en utilisant le fait que $s_i s_n = s_{n-1}s_i$ pour tous $0 \leqslant i \leqslant n-2$. On a aussi

$$\theta(\beta e_n) = \beta J = J\beta = \theta(e_{n-1}\beta).$$

Donc l'opérateur b commute avec les morphismes $T(e_n)$ pour tout $n \geqslant 0$. Considérons maintenant, pour tout $n \geqslant 0$, le morphisme $(-1)^n(\alpha - \gamma)$ de $\mathcal{TF}in$. L'application $\alpha : [n] \longrightarrow [n]$ étant le cycle $(0\ 1 \cdots n)$ et $\gamma : [n] \longrightarrow [n]$ est définie par

$$\gamma(i) = \begin{cases} i+1 & \text{si } i \neq n \\ 1 & \text{si } i = n. \end{cases}$$

On a alors $\theta((-1)^n(\alpha - \gamma)) = \kappa$: l'opérateur de Karoubi défini en 2.4. Le morphisme $(-1)^n(\alpha - \gamma)e_n$ induit donc un morphisme qu'on notera aussi $\kappa : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$. Grace au lemme 3.5 on montre qu'on a pour les opérateurs κ et b, toutes les identités établies par par Cuntz et Quillen (cf. [3]) dans le cadre des formes différentielles non commutatives, à savoir :

$$db + bd = 1 - \kappa$$

$$b\kappa = \kappa b \quad \text{et} \quad d\kappa = \kappa d$$

$$\kappa^n = 1 + b\kappa^n d$$

$$\kappa^{n+1} = 1 - db$$

$$\left(\kappa^n - 1\right)\left(\kappa^{n+1} - 1\right) = 0.$$

3.19. Theoreme. *Soit T une AGS. Le cup produit $T^n \otimes T^p \longrightarrow T^{n+p}$ induit un accouplement*

$$\Omega^n \otimes \Omega^p \longrightarrow \Omega^{n+p}.$$

La somme $\bigoplus_{n \geqslant 0} \Omega^n$ est une sous-algèbre différentielle graduée de T^*.

3.20. Demonstration. Soient $\omega \in \Omega^n$, $\theta \in \Omega^p$. On a alors

$$\omega\theta = T(f_{n,p})(\omega)T(g_{n,p})(\theta).$$

Pour tout $i \leqslant n + p - 1$, on a

$$T(s_i)(\omega\theta) = T(s_i f_{n,p})(\omega)T(s_i g_{n,p})(\theta).$$

Si $i \leqslant n - 1$, alors $s_i f_{n,p} = f_{n,p} s_i$ et donc $T(s_i f_{n,p})(\omega) = 0$. Si $i \geqslant n$, alors $s_i g_{n,p} = g_{n,p} s_{i-n}$ et donc $T(s_i g_{n,p})(\theta) = 0$. D'où $\omega\theta \in \Omega^{n+p}$. D'autre part, les morphismes $T(e_n)$ commutent avec la différentielle d, d'où le théorème. □

4. Action des groupes symetriques sur les algebres graduees avec symetries

Identifions le groupe symétrique $\mathcal{S}_{n+1}$ au groupe des permutations de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$ et $\mathcal{S}_n$ au sous-groupe des permutations α de $\mathcal{S}_{n+1}$ telles que $\alpha(0) = 0$. A un élément α de $\mathcal{S}_{n+1}$, on associe le morphisme

$$k_\alpha : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$$

défini par la correspondance

$$\omega \longmapsto \varepsilon_\alpha T\left(e_n \alpha^{-1}\right)(\omega).$$

(Le signe ε_α étant la signature de la permutation α.)

4.1. Proposition. *Soient A une R-algèbre, $\omega = a_0 da_1 da_2 \dots da_n$ une forme de $\Omega^n(A)$ et α une permutation de $\mathcal{S}_{n+1}$. On a alors*

$$k_\alpha(\omega) = \varepsilon_\alpha a_{\alpha(0)} da_{\alpha(1)} da_{\alpha(2)} \dots da_{\alpha(n)} + d\omega' \quad \text{où} \quad \omega' \in \Omega^{n-1}(A)$$

et si $\alpha \in \mathcal{S}_n$ alors

$$k_\alpha(\omega) = \varepsilon_\alpha a_0 da_{\alpha(1)} da_{\alpha(2)} \dots da_{\alpha(n)}.$$

4.2. Demonstration. Remarquons que pour une forme $a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \dots \otimes a_n \in T^n(A)$, on a

$$T\big(\alpha^{-1}\big)(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n) = a_{\alpha(0)} \otimes a_{\alpha(1)} \otimes a_{\alpha(2)} \otimes \dots \otimes a_{\alpha(n)}.$$

Considérons maintenant la forme $\omega = a_0 da_1 da_2 \dots da_n$ de $\Omega^n(A)$. Si $\alpha \in \mathcal{S}_n$ alors

$$k_\alpha(\omega) = \varepsilon_\alpha JT\big(\alpha^{-1}\big)(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n).$$

Ceci vient du fait que dans tous les autres termes de la somme de produits tensoriels donnant $a_0 da_1 da_2 \dots da_n$, il y'a des 1 situés dans des rangs différents de 0 et en appliquant $JT(\alpha^{-1})$ à ces termes là on trouve 0. D'où on a,

$$k_\alpha(\omega) = \varepsilon_\alpha J(a_0 \otimes a_{\alpha(1)} \otimes a_{\alpha(2)} \otimes \dots \otimes a_{\alpha(n)}) = \varepsilon_\alpha a_0 da_{\alpha(1)} da_{\alpha(2)} \cdots da_{\alpha(n)}.$$

Si $\alpha \in \mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n$ alors $\alpha(0) = i \neq 0$. En raisonnant sur les rangs où se situent les 1, on voit que

$$\begin{aligned} k_\alpha(\omega) = {} & \varepsilon_\alpha JT\big(\alpha^{-1}\big)\Bigg(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \\ & + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes a_{j+2} \otimes \dots \otimes a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n\Bigg) \\ = {} & \varepsilon_\alpha a_{\alpha(0)} da_{\alpha(1)} da_{\alpha(2)} \dots da_{\alpha(n)} + \varepsilon_\alpha \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} db_{\alpha(1)} db_{\alpha(2)} \dots db_{\alpha(n)}. \end{aligned}$$

Avec

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{si } k \leqslant j-1 \text{ ou } k \geqslant i+1 \\ a_{k+1} & \text{si } j+1 \leqslant k \leqslant i-1 \\ a_j a_{j+1} & \text{si } k = j \\ 1 & \text{si } k = i. \end{cases}$$

D'où la proposition. $\square$

Définissons maintenant l'application $\varphi : \mathcal{S}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{S}_n$ par la formule

$$\varphi(\alpha) = \alpha' : i \longmapsto \begin{cases} \alpha(i) + 1 & \text{si } \alpha(i) < \alpha(0) \\ \alpha(i) & \text{si } \alpha(i) > \alpha(0) \end{cases} \quad \text{pour tout } i \neq 0.$$

Cette application est inverse à gauche de l'inclusion $\mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_{n+1}$ et si $\alpha \in \mathcal{S}_{n+1}$ alors $\varepsilon_{\alpha'} = (-1)^{\alpha(0)} \varepsilon_\alpha$.

4.3. Proposition. *Soient T une AGS et $\alpha \in \mathcal{S}_{n+1}$. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{n-1} & \xrightarrow{d} & Z^n \\ {\scriptstyle k_{\alpha'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k_\alpha} \\ \Omega^{n-1} & \xrightarrow{d} & Z^n \end{array}$$

L'ensemble Z^n étant celui des formes $\omega \in \Omega^n$ telles que $d\omega = 0$.

4.4. Demonstration. Si $\alpha \in \mathcal{S}_n$, alors $\alpha = \alpha'$ et pour une forme $a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n$ de $T^{n-1}(A)$ où $A = R[t]$, on a

$$\begin{aligned} \theta\big(\varepsilon_\alpha e_n \alpha^{-1} de_{n-1}\big)(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) &= \varepsilon_\alpha JT\big(\alpha^{-1}\big)(da_1 da_2 \ldots da_n) \\ &= \varepsilon_\alpha da_{\alpha(1)} da_{\alpha(2)} \ldots da_{\alpha(n)}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \theta\big(de_{n-1}\varepsilon_{\alpha'}\alpha'^{-1} e_{n-1}\big)(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) &= \varepsilon_{\alpha'} dJT\big(\alpha'^{-1}\big)(a_1 da_2 \ldots da_n) \\ &= \varepsilon_\alpha da_{\alpha(1)} da_{\alpha(2)} \ldots da_{\alpha(n)}. \end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme 3.5 on a

$$\varepsilon_\alpha e_n \alpha^{-1} de_{n-1} = de_{n-1}\varepsilon_{\alpha'}\alpha'^{-1} e_{n-1}$$

dans $\mathcal{TF}in$, d'où $k_\alpha d = dk_{\alpha'}$ sur Ω^{n-1}.

Si $\alpha \in \mathcal{S}_{n+1}$ et $\alpha(0) = i \neq 0$, on a alors

$$\theta\big(\varepsilon_\alpha e_n \alpha^{-1} de_{n-1}\big)(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) = \varepsilon_\alpha JT\big(\alpha^{-1}\big)(da_1 da_2 \ldots da_n).$$

En écrivant $da_1 da_2 \ldots da_n$ comme somme d'éléments de $A^{\otimes n+1}$ on voit que

$$\varepsilon_\alpha JT\big(\alpha^{-1}\big)(da_1 da_2 \ldots da_n) = \varepsilon_\alpha JT\big(\alpha^{-1}\big)\big((-1)^i a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n\big).$$

Car dans tous les autres termes de la somme de produits tensoriels donnant $da_1 da_2 \ldots da_n$, il y'a des 1 dans des rangs différents de i et en appliquant $JT(\alpha^{-1})$ à ces termes, on trouve 0. Posons $b_j = a_{j+1}$ pour $j < i$, $b_i = 1$ et $b_j = a_j$ pour $j > i$. On a alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha JT\big(\alpha^{-1}\big)(da_1 da_2 \ldots da_n) &= (-1)^i \varepsilon_\alpha JT\big(\alpha^{-1}\big)(b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) \\ &= (-1)^i \varepsilon_\alpha J(1 \otimes b_{\alpha(1)} \otimes b_{\alpha(2)} \otimes \cdots \otimes b_{\alpha(n)}) \\ &= (-1)^i \varepsilon_\alpha db_{\alpha(1)} db_{\alpha(2)} \ldots db_{\alpha(n)}. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \theta\big(de_{n-1}\varepsilon_{\alpha'}\alpha'^{-1} e_{n-1}\big)(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) &= dJ\varepsilon_{\alpha'} T\big(\alpha'^{-1}\big)(a_1 da_2 \ldots da_n) \\ &= (-1)^i \varepsilon_\alpha da_{\alpha'(1)} da_{\alpha'(2)} \ldots da_{\alpha'(n)}. \end{aligned}$$

Si $\alpha(j) < i$, $a_{\alpha'(j)} = a_{\alpha(j)+1} = b_{\alpha(j)}$ et si $\alpha(j) > i$, $a_{\alpha'(j)} = a_{\alpha(j)} = b_{\alpha(j)}$. Donc on a bien, d'après le lemme 3.5

$$\varepsilon_\alpha e_n \alpha^{-1} d e_{n-1} = d e_{n-1} \varepsilon_{\alpha'} \alpha'^{-1} e_{n-1}$$

dans $\mathcal{TF}in$, d'où $k_\alpha d = d k_{\alpha'}$ sur Ω^{n-1}. □

4.5. Proposition. *Soit l'application $\psi : \mathcal{S}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{S}_{n+2}$ définie par la correspondance*

$$\alpha \longmapsto \beta : i \longmapsto \begin{cases} \alpha(i-1)+1 & si\ i \neq 0 \\ 0 & si\ i = 0. \end{cases}$$

Pour toute AGS T et toute permutation $\alpha \in \mathcal{S}_{n+1}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n & \xrightarrow{k_\alpha} & \Omega^n \\ \Big\downarrow d & & \Big\downarrow d \\ Z^{n+1} & \xrightarrow{k_{\psi(\alpha)}} & Z^{n+1}. \end{array}$$

Donc k_α envoie Z^n sur lui même.

4.6. Demonstration. Ceci découle directement de la proposition 4.3. □

4.7. Proposition. *Soient $\alpha \in \mathcal{S}_{n+1}$, $\beta \in \mathcal{S}_n$ et T une AGS. On a alors $k_{\alpha\beta} = k_\beta k_\alpha$. Le groupe $\mathcal{S}_n$ opère donc à droite sur Ω^n.*

4.8. Demonstration. Soient T une AGS et $\omega \in \Omega^n$. On a alors

$$k_{\alpha\beta}(\omega) = \varepsilon_{\alpha\beta} e_n T\left(\beta^{-1}\alpha^{-1}\right)(\omega) = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta e_n T\left(\beta^{-1}\right) T\left(\alpha^{-1}\right)(\omega).$$

Puisque $\beta \in \mathcal{S}_n$, on a

$$e_n T\left(\beta^{-1}\right) = e_n T\left(\beta^{-1}\right) e_n.$$

En effet, soit $a_0 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \in T^n(A)$ où $A = R[t]$. On a

$$\begin{aligned} \theta\left(e_n \beta^{-1} e_n\right)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= JT\left(\beta^{-1}\right)(a_0 da_1 \ldots da_n) \\ &= a_0 da_{\beta(1)} \ldots da_{\beta(n)} \\ &= JT\left(\beta^{-1}\right)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &= \theta\left(e_n \beta^{-1}\right)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n). \end{aligned}$$

Donc d'après le lemme 3.5 $e_n \beta^{-1} e_n = e_n \beta^{-1}$ dans $\mathcal{TF}in$. D'où on a

$$k_{\alpha\beta}(\omega) = \varepsilon_\beta e_n T\left(\beta^{-1}\right) \varepsilon_\alpha e_n T\left(\alpha^{-1}\right)(\omega) = k_\beta k_\alpha(\omega). \qquad \square$$

4.9. Remarque. Soit T une AGS. La sous-algèbre Ω^* est donc un objet de la catégorie $\mathcal{S}$-mod (cf. [9]). En utilisant alors le foncteur libre décrit dans [9], qui est adjoint à gauche du foncteur oubli de la catégorie des opérades dans celle des $\mathcal{S}$-mod, on associe une opérade à Ω^*.

Si $\alpha \in \mathcal{S}_{n+1}$ et $\beta \in \mathcal{S}_{n+1}$ avec $\beta(0) \neq 0$, on n'a pas en général $k_{\alpha\beta} = k_\beta k_\alpha$. (Les contres exemples existent à partir de $n = 2$.) Essayons donc, pour tout $\omega \in \Omega^n$, de mesurer dans ce cas la différence entre $k_{\alpha\beta}(\omega)$ et $k_\beta k_\alpha(\omega)$. Soit t le générateur $(0\ 1\ 2 \cdots n)$ du groupe cyclique C_{n+1}. On peut alors écrire β sous la forme $\beta = t^r \beta_1$ où $r \geqslant 1$ et $\beta_1 \in \mathcal{S}_n$. On aura alors

$$k_\beta k_\alpha(\omega) - k_{\alpha\beta}(\omega) = k_{t^r\beta_1} k_\alpha(\omega) - k_{\alpha t^r \beta_1}(\omega) = k_{\beta_1}\big(k_{t^r} k_\alpha(\omega) - k_{\alpha t^r}(\omega)\big).$$

Il nous faut donc mesurer la différence entre $k_{t^r} k_\alpha(\omega)$ et $k_{\alpha t^r}(\omega)$. Définissons d'abord, pour toute AGS T, le morphisme

$$b'_r : T^n \longrightarrow T^{n-1}$$

associé au morphisme $\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i s_i$ de $\mathcal{TF}in$. On a alors

$$b'_{r-1} b'_r = 0 \quad \text{et } b'_r = 0 \text{ sur } \Omega^n.$$

4.10. Lemme. *Pour toute AGS T et tout $1 \leqslant r \leqslant n$, on a*

$$e_n T\big(\big(t^r\big)^{-1}\big) e_n - e_n T\big(\big(t^r\big)^{-1}\big) = (-1)^{nr} d\kappa^{r-1} e_{n-1} b'_{n-r+1}.$$

4.11. Demonstration. Soit $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in A^{\otimes n+1}$ où $A = R[t]$. On a

$$\begin{aligned}
&\theta\big(e_n\big(t^r\big)^{-1} e_n - e_n\big(t^r\big)^{-1}\big)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\
&\quad = JT\big(\big(t^r\big)^{-1}\big)(a_0 da_1 \ldots da_n) - JT\big(\big(t^r\big)^{-1}\big)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n).
\end{aligned}$$

En écrivant $a_0 da_1 \ldots da_n$ comme somme d'éléments de $A^{\otimes n+1}$, on voit que

$$\begin{aligned}
JT\big(\big(t^r\big)^{-1}\big)(a_0 da_1 \ldots da_n) = JT\big(\big(t^r\big)^{-1}\big)\big[&a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\
&+ (-1)^{n-r+1}\big(a_0 a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-r+1} \otimes 1 \otimes a_{n-r+2} \otimes \cdots \otimes a_n \\
&- a_0 \otimes a_1 a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-r+1} \otimes 1 \otimes a_{n-r+2} \otimes \cdots \otimes a_n + \cdots \\
&+ (-1)^{n-r} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-r} a_{n-r+1} \otimes 1 \otimes a_{n-r+2} \otimes \cdots \otimes a_n\big)\big].
\end{aligned}$$

Car dans les autres termes de la somme on a des 1 dans des rangs différents de $n - r + 1$. En appliquant $JT((t^r)^{-1})$ à ces termes, on trouve 0. On a donc

$$\begin{aligned}
&\big(JT\big(\big(t^r\big)^{-1}\big) J - JT\big(\big(t^r\big)^{-1}\big)\big)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\
&\quad = (-1)^{n-r+1} J\big(1 \otimes a_{n-r+2} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-r+1} \\
&\qquad - 1 \otimes a_{n-r+2} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes a_1 a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-r+1} + \cdots \\
&\qquad + (-1)^{n-r} 1 \otimes a_{n-r+2} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-r} a_{n-r+1}\big) \\
&\quad = (-1)^{n-r+1+(n-1)(r-1)} \kappa^{r-1}\big(d(a_0 a_1) da_2 \ldots da_n - da_0 d(a_1 a_2) \ldots da_n + \cdots \\
&\qquad + (-1)^{n-r} da_0 da_2 \ldots d(a_{n-r} a_{n-r+1}) \ldots da_n\big).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\theta\big(de_{n-1}b'_{n-r+1}\big)(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=d(a_0a_1)da_2\dots da_n-da_0d(a_1a_2)\dots da_n+\cdots$$
$$+(-1)^{n-r}da_0da_2\dots d(a_{n-r}a_{n-r+1})\dots da_n.$$

Donc d'après le lemme 3.5, on a bien

$$e_nT\big(\big(t^r\big)^{-1}\big)e_n-e_nT\big(\big(t^r\big)^{-1}\big)=(-1)^{nr}d\kappa^{r-1}e_{n-1}b'_{n-r+1}.\qquad\square$$

4.12. Proposition. *Soient α et β deux éléments du groupe symétrique $\mathcal{S}_{n+1}$ avec $\beta=t^r\beta_1$ où $r\geqslant 1$ et $\beta_1\in\mathcal{S}_n$. Pour toute AGS T, on a*

$$k_\beta k_\alpha-k_{\alpha\beta}=\varepsilon_\alpha dk_{\beta_1}\kappa^{r-1}e_{n-1}b'_{n-r+1}T\big(\alpha^{-1}\big).$$

4.13. Demonstration. Ce résultat découle immédiatement des lemmes 3.5 et 4.10 puisque

$$k_\beta k_\alpha-k_{\alpha\beta}=k_{\beta_1}(k_{t^r}k_\alpha-k_{\alpha t^r})=\varepsilon_\alpha\varepsilon_{t^r}k_{\beta_1}\big(e_nT\big(\big(t^r\big)^{-1}\big)e_n-e_nT\big(\big(t^r\big)^{-1}\big)\big)T\big(\alpha^{-1}\big).\qquad\square$$

Pour mieux formaliser l'action des opérateurs k_α, nous allons maintenant utiliser la description bien connue du groupe symétrique $\mathcal{S}_{n+1}$ par les transpositions $t_i=(i,i+1)$ où $0\leqslant i\leqslant n-1$. Soit $\mathcal{R}_n$ l' idéal bilatère de la R-algèbre non commutative libre $R[t_0,t_{1,\dots,}t_{n-1}]$ engendré par les éléments $(t_i)^2-1$ et $t_it_{i+1}t_i-t_{i+1}t_it_{i+1}$ et soit l'algèbre $\mathcal{J}_n$ définie comme étant le quotient de l'algèbre libre $R[t_0,t_{1,\dots,}t_{n-1}]$ par l'idéal bilatère I_n engendré par

$$\big((t_0)^2-1\big)+(t_0-1)\mathcal{R}_n+\mathcal{R}_{n-1}$$

où $\mathcal{R}_{n-1}$ est naturellement inclus dans $R[t_0,t_{1,\dots,}t_{n-1}]$ à travers l'inclusion canonique de $R[t_1,t_{2,\dots,}t_{n-1}]$ dans $R[t_0,t_{1,\dots,}t_{n-1}]$. Notons que cette R-algèbre $\mathcal{J}_n$ est un R-module de type fini et qu'elle joue un rôle intermédiaire entre les algèbres $R[\mathcal{S}_n]$ et $R[\mathcal{S}_{n+1}]$. Plus précisément, on a les morphismes

$$R[\mathcal{S}_n]\longrightarrow\mathcal{J}_n\longrightarrow R[\mathcal{S}_{n+1}]\subset R[\mathcal{S}_{n+2}].$$

Le premier étant induit par l'inclusion de $R[t_1,t_{2,\dots,}t_{n-1}]$ dans $R[t_0,t_{1,\dots,}t_{n-1}]$ et le second est défini par l'inclusion de I_n dans $\mathcal{R}_n$.

En utilisant la proposition 3.17, on montre facilement que ces morphismes d'algèbres rendent commutatifs les morphismes suivants :

$$Z^n\longrightarrow\Omega^n\longrightarrow d\Omega^n$$

pour l'action de $R[\mathcal{S}_n]$, $\mathcal{J}_n$ et $R[\mathcal{S}_{n+1}]$ sur les trois R-modules respectivement. L'action de $\mathcal{J}_n$ sur Ω^n étant définie par

$$(\omega)^{t_{i_0}t_{i_1}\dots t_{i_q}}=k_{t_{i_q}}\dots k_{t_{i_1}}k_{t_{i_0}}(\omega).$$

On peut aussi définir un morphisme d'algèbres $\mathcal{J}_n\longrightarrow\mathcal{J}_{n+1}$ qui à $t_{i_0}t_{i_1}\dots t_{i_q}$ associe $t_{i_0+1}t_{i_1+1}\dots t_{i_q+1}$. Il convient de noter que ce morphisme est induit par le morphisme $\psi:\mathcal{S}_{n+1}\longrightarrow\mathcal{S}_{n+2}$ défini plus haut. On peut donc introduire $\mathcal{J}_\infty=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathcal{J}_n$ qui opère de manière graduée sur Ω^*. De même $R_\infty=\bigoplus_{n\geqslant 0}R[\mathcal{S}_n]$ opère sur Z^* et on a des morphismes équivariants

$$Z^* \longrightarrow \Omega^* \longrightarrow d\Omega^*$$

associés aux morphismes

$$R_\infty \longrightarrow \mathcal{J}_\infty \longrightarrow R_\infty[1].$$

On peut aussi définir des morphismes

$$\xi : \mathcal{J}_n \otimes R[\mathcal{S}_p] \longrightarrow \mathcal{J}_{n+p}$$
$$t_{i_0} t_{i_1} \dots t_{i_q} \otimes \beta \longmapsto t_{i_0} t_{i_1} \dots t_{i_q} t_{j_0+n} t_{j_1+n} \dots t_{j_{q'}+n}$$

où $\beta = t_{j_0} t_{j_1} \dots t_{j_{q'}}$ et

$$\phi : R[\mathcal{S}_n] \otimes R[\mathcal{S}_p] \longrightarrow R[\mathcal{S}_{n+p}]$$
$$\alpha \otimes \beta \longmapsto \gamma : i \longmapsto \begin{cases} \alpha(i) & \text{si } i \leqslant n \\ \beta(i-n)+n & \text{si } i > n. \end{cases}$$

4.14. Proposition. *Les morphismes ξ et ϕ sont compatibles avec les cup-produits* :

$$\Omega^n \otimes Z^p \longrightarrow \Omega^{n+p} \quad \textit{et} \quad Z^n \otimes Z^p \longrightarrow Z^{n+p}.$$

4.15. Demonstration. Soient $\omega_1 \in \Omega^n$, $\omega_2 \in Z^p$, $t_{i_0} t_{i_1} \dots t_{i_q} \in \mathcal{J}_n$ et $\beta = t_{j_0} t_{j_1} \dots t_{j_{q'}} \in R[\mathcal{S}_p]$. On a

$$(\omega_1\omega_2)^{t_{i_0} t_{i_1} \dots t_{i_q} t_{j_0+n} t_{j_1+n} \dots t_{j_{q'}+n}} = k_{t_{j_{q'}+n}} \dots k_{t_{j_1+n}} k_{t_{j_0+n}} k_{t_{i_q}} \dots k_{t_{i_1}} k_{t_{i_0}}(\omega_1\omega_2).$$

Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on a

$$\varepsilon_{t_i} e_{n+p} T(t_i)\big(T(f_{n,p})(\omega_1) T(g_{n,p})(\omega_2)\big) = \varepsilon_{t_i} e_{n+p}\big(T(t_i f_{n,p})(\omega_1) T(t_i g_{n,p})(\omega_2)\big).$$

Or dans ce cas on a $t_i f_{n,p} = f_{n,p} t_i$ et $t_i g = g$ donc et grâce à la proposition 3.17 on a

$$k_{t_i}(\omega_1\omega_2) = k_{t_i}(\omega_1)\omega_2$$

pour $i = n-1$, on a

$$\begin{aligned} k_{t_{n-1}}(\omega_1\omega_2) &= \varepsilon_{t_{n-1}} e_{n+p} T(t_{n-1})\big(T(f_{n,p})(\omega_1) T(g_{n,p})(\omega_2)\big) \\ &= \varepsilon_{t_{n-1}} e_{n+p}\big(T(t_{n-1} f_{n,p})(\omega_1) T(t_{n-1} g_{n,p})(\omega_2)\big). \end{aligned}$$

L'application $t_{n-1} g_{n,p} : [p] \longrightarrow [n+p]$ vérifie

$$t_{n-1} g_{n,p}(i) = \begin{cases} i+n & \text{si } i > 0 \\ n-1 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Donc $t_{n-1} g_{n,p} = g_{n-1,p+1} \delta_1$ (δ_1 étant l'opérateur coface défini plus haut). Puisque $d(\omega_2) = 0$, alors

$$T(t_{n-1} g_{n,p})(\omega_2) = T\big(g' \delta_1\big)(\omega_2) = \left(T(g_{n-1,p+1}\delta_0) + \sum_{j=2}^{p+1} (-1)^j T(g_{n-1,p+1}\delta_j)\right)(\omega_2).$$

Or $g'\delta_0 = g$, donc

$$k_{t_{n-1}}(\omega_1\omega_2) = \varepsilon_{t_{n-1}} e_{n+p}\left(T(f_{n,p})T(t_{n-1})(\omega_1)\left(T(g_{n,p}) + \sum_{j=2}^{p+1}(-1)^j T(g_{n-1,p+1}\delta_j)\right)(\omega_2)\right).$$

Soit $2 \leqslant j \leqslant p+1$. On a $g_{n-1,p+1}\delta_j = \delta_{j+n-1}g_{n-1,p}$ et $f_{n,p} = \delta_{j+n-1}f_{n,p-1}$. D'où on a

$$\begin{aligned}
&e_{n+p}\big(T(f_{n,p})T(t_{n-1})(\omega_1)T(g_{n-1,p+1}\delta_j)(\omega_2)\big)\\
&\quad = e_{n+p}T(\delta_{j+n-1})\big(T(f_{n,p})T(t_{n-1})(\omega_1)T(g_{n-1,p+1})(\omega_2)\big).
\end{aligned}$$

Or on a

$$\theta(e_{n+p}\delta_{j+n-1}) = JT(\delta_{j+n-1}) = 0$$

donc d'après le lemme 3.5, $e_{n+p}T(\delta_{j+n-1}) = 0$ et par suite

$$k_{t_{n-1}}(\omega_1\omega_2) = k_{t_{n-1}}(\omega_1)\omega_2.$$

Soit enfin $j \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned}
k_{t_{j+n}}(\omega_1\omega_2) &= \varepsilon_{t_{j+n}} e_{n+p}T(t_{j+n})\big(T(f_{n,p})(\omega_1)T(g_{n,p})(\omega_2)\big)\\
&= \varepsilon_{t_{j+n}} e_{n+p}\big(T(t_{j+n}f_{n,p})(\omega_1)T(t_{j+n}g_{n,p})(\omega_2)\big).
\end{aligned}$$

Avec $t_{j+n}f_{n,p} = f_{n,p}$ et $t_{j+n}g_{n,p} = g_{n,p}t_j$. Donc on a

$$\begin{aligned}
k_{t_{j+n}}(\omega_1\omega_2) &= \varepsilon_{t_j} e_{n+p}\big(T(f_{n,p})(\omega_1)T(g_{n,p})T(t_j)(\omega_2)\big)\\
&= \varepsilon_{t_j} e_{n+p}\big(T(f_{n,p})(\omega_1)e_pT(g_{n,p})T(t_j)(\omega_2)\big)\\
&= e_{n+p}\big(T(f_{n,p})(\omega_1)T(g_{n,p})k_{t_j}(\omega_2)\big) = \omega_1 k_{t_j}(\omega_2).
\end{aligned}$$

et on aura donc

$$k_{t_{j_{q'}+n}}\ldots k_{t_{j_1+n}}k_{t_{j_0+n}}k_{t_{i_q}}\ldots k_{t_{i_1}}k_{t_{i_0}}(\omega_1\omega_2) = k_{t_{i_q}}\ldots k_{t_{i_1}}k_{t_{i_0}}(\omega_1)k_{t_{j_{q'}}}\ldots k_{t_{j_1}}k_{t_{j_0}}(\omega_2).$$

C'est à dire (puisque tous les $t_{j_r} \in \mathcal{S}_p$)

$$(\omega_1\omega_2)^{t_{i_0}t_{i_1}\ldots t_{i_q}t_{j_0+n}t_{j_1+n}\ldots t_{j_{q'}+n}} = (\omega_1)^{t_{i_0}t_{i_1}\ldots t_{i_q}}k_\beta(\omega_2).$$

D'où la compatibilité du premier morphisme avec le premier cup-produit. Pour le deuxième morphisme, considérons des permutations $\alpha \in \mathcal{S}_n$ et $\beta \in \mathcal{S}_p$. On pourra alors écrire $\alpha = t_{i_0}t_{i_1}\ldots t_{i_q}$ et $\beta = t_{j_0}t_{j_1}\ldots t_{j_{q'}}$ avec $1 \leqslant i_r \leqslant n-1$ pour tout $1 \leqslant r \leqslant q$ et $1 \leqslant j_s \leqslant p-1$ pour tout $1 \leqslant s \leqslant q'$ et on aura

$$\alpha \otimes \beta = t_{i_0}t_{i_1}\ldots t_{i_q}t_{j_0+n}t_{j_1+n}\ldots t_{j_{q'}+n}.$$

Donc

$$k_{\alpha\otimes\beta}(\omega_1\omega_2)=k_{t_{i_0}t_{i_1}\ldots t_{i_q}t_{j_0+n}t_{j_1+n}\ldots t_{j_{q'}+n}}(\omega_1\omega_2)=(\omega_1)^{t_{i_0}t_{i_1}\ldots t_{i_q}}k_\beta(\omega_2)=k_\alpha(\omega_1)k_\beta(\omega_2)$$

car $t_{i_r}\in\mathcal{S}_n$ pour tout $0\leqslant r\leqslant q$. $\square$

Soit $n\geqslant 1$. Pour tout $1\leqslant r\leqslant n$, définissons l'application $\alpha_r:[n]\longrightarrow[n-1]$ par

$$\alpha_r(i)=\begin{cases} i & \text{si } i<r\\ 0 & \text{si } i=r\\ i-1 & \text{si } i>r.\end{cases}$$

Notons β_r est le r-cycle $(0\ 1\ 2\ldots r)$ et $\gamma_r:[n]\longrightarrow[n]$ l'application définie par

$$\gamma_r(i)=\begin{cases} i+1 & \text{si } i<r\\ 1 & \text{si } i=r\\ i & \text{si } i>r.\end{cases}$$

4.16. Proposition. *Pour tous $n\geqslant 1$ et $1\leqslant r\leqslant n$, on a*

$$\theta\big((-1)^r e_{n-1}\alpha_r e_n\big)=b_r\quad\textit{et}\quad\theta\big((-1)^r e_n(\beta_r-\gamma_r)e_n\big)=\kappa_r$$

où b_r et κ_r sont définis par

$$b_r(a_0da_1\cdots da_n)=b(a_0da_1\cdots da_r)da_{r+1}\cdots da_n\quad\textit{et}$$
$$\kappa_r(a_0da_1\cdots da_n)=\kappa(a_0da_1\cdots da_r)da_{r+1}\cdots da_n$$

pour toute forme $a_0da_1\cdots da_n\in\Omega^n(A)$ où $A=R[t]$.

4.17. Demonstration. Soit $a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\in A^{\otimes n+1}$. Si $r=n$ alors α_r n'est autre que s_r et on a bien

$$\theta\big((-1)^n e_{n-1}\alpha_n e_n\big)(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=b(a_0da_1\cdots da_n).$$

Si $r<n$. On a

$$\begin{aligned}&\theta\big((-1)^r e_{n-1}\alpha_r e_n\big)(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n)\\ &\quad=(-1)^r JT(\alpha_r)(a_0da_1\cdots da_n)\\ &\quad=(-1)^r JT(\alpha_r)\big(T(f_{r,n-r})(a_0da_1\cdots da_r)T(g_{r,n-r})(da_{r+1}\cdots da_n)\big).\end{aligned}$$

Posons $\omega_1=a_0da_1\cdots da_r$ et $\omega_2=a_{r+1}da_{r+2}\cdots da_n$. On a donc

$$\begin{aligned}&\theta\big((-1)^r e_{n-1}\alpha_r e_n\big)(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n)\\ &\quad=(-1)^r JT(\alpha_r)\big(T(f_{r,n-r})(\omega_1)T(g_{r,n-r})(d\omega_2)\big)\\ &\quad=(-1)^r JT(\alpha_r)\left(T(f_{r,n-r})(\omega_1)\left(\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i T(g_{r,n-r}\delta_i)(\omega_2)\right)\right).\end{aligned}$$

Or pour tout $i \geqslant 1$, on a $g_{r,n-r}\delta_i = \delta_{i+r}g_{r,n-r-1}$ et $f_{r,n-r} = \delta_{i+r}f_{r,n-r-1}$. On a donc

$$(-1)^r JT(\alpha_r)\big(T(f_{r,n-r})(\omega_1)T(g_{r,n-r}\delta_i)(\omega_2)\big) = JT(\alpha_r\delta_{i+r})\big(T(f_{r,n-r})(\omega_1)T(g_{r,n-r-1})(\omega_2)\big) = 0$$

car $JT(\alpha_r\delta_{i+r}) = 0$. D'où on a

$$\begin{aligned}\theta\big((-1)^r e_{n-1}\alpha_r e_n\big)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (-1)^r J\big(T(\alpha_r f_{r,n-r})(\omega_1)T(\alpha_r g_{r,n-r}\delta_0)(\omega_2)\big)\\ &= (-1)^r J\big(T(f_{r-1,n})T(\alpha_r)(\omega_1)T(g_{r-1,n-r}\delta_0)(\omega_2)\big)\end{aligned}$$

car $\alpha_r g_{r,n-r}\delta_0 = g_{r-1,n-r}\delta_0$. Or en répétant le raisonnement qu'on vient juste de faire, on montre que

$$\begin{aligned}(-1)^r J\big(T(f_{r-1,n})T(\alpha_r)(\omega_1)T(g_{r-1,n-r}\delta_0)(\omega_2)\big) &= (-1)^r J\big(T(f_{r-1,n})T(\alpha_r)(\omega_1)T(g_{r-1,n-r})(d\omega_2)\big)\\ &= J\big(T(f_{r-1,n})b(\omega_1)T(g_{r-1,n-r})(d\omega_2)\big)\end{aligned}$$

et on a bien

$$\theta\big((-1)^r e_{n-1}\alpha_r e_n\big)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = b(a_0da_1\cdots da_r)da_{r+1}da_{r+2}\cdots da_n = b_r(a_0da_1\cdots da_n).$$

De la même façon, on montre que $\theta((-1)^r e_n(\beta_r - \gamma_r)e_n) = \kappa_r$. $\square$

4.18. Definition. Soient T une AGS, $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant r \leqslant n$. On définit les morphismes $b_r : \Omega^n \longrightarrow \Omega^{n-1}$ par $b_r = (-1)^r e_{n-1}T(\alpha_r)$ et $\kappa_r : \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ associé au morphisme $(-1)^r e_n(\beta_r - \gamma_r)$ de de $\mathcal{TF}in$.

4.19. Proposition. *Soient T une AGS, $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant r \leqslant n$. On a alors les relations suivantes :*

$$b_{r-1}b_r = 0, \qquad b_r\kappa_r = \kappa_{r-1} \quad \text{et} \quad b_r\kappa_r^{r+1} = 1 - db_r.$$

Pour toute permutation $\alpha \in \mathcal{S}_{n+1}$ de support contenu dans $\{r+1, \ldots, n\}$, on a

$$b_r\kappa_\alpha = \kappa_\alpha b_r.$$

4.20. Demonstration. Toutes ces relations se montrent aisément en utilisant le lemme 3.5, puisque elles ont été établies dans le cadre des formes différentielles non commutatives. $\square$

4.21. Proposition. *Soient T une AGS, $n \geqslant 1$, $1 \leqslant r \leqslant n$, $\omega_1 \in \Omega^n$, $\omega_2 \in Z^p$ et α une permutation de support contenu dans $\{0, 1, \ldots, r\}$. On a alors les identités suivantes :*

$$k_\alpha(\omega_1\omega_2) = k_\alpha(\omega_1)\omega_2, \qquad b_r(\omega_1\omega_2) = b_r(\omega_1)\omega_2 \quad \text{et} \quad \kappa_r(\omega_1\omega_2) = \kappa_r(\omega_1)\omega_2.$$

4.22. Demonstration. On a

$$\begin{aligned}k_\alpha(\omega_1\omega_2) &= \varepsilon_\alpha e_{n+p}T\big(\alpha^{-1}\big)\big(T(f_{n,p})(\omega_1)T(g_{n,p})(\omega_2)\big)\\ &= \varepsilon_\alpha e_{n+p}\big(T\big(f_{n,p}\alpha^{-1}\big)(\omega_1)T\big(\alpha^{-1}g_{n,p}\big)(\omega_2)\big).\end{aligned}$$

Or on a $\alpha^{-1}g_{n,p} = g'\delta_1$ où $g' : [p+1] \longrightarrow [n+p]$ vérifie

$$g'(i) = \begin{cases} i+n-1 & \text{si } i \geqslant 1\\ \alpha^{-1}(n) & \text{si } i = 0.\end{cases}$$

Or $d\omega_2 = 0$ donc

$$T\big(g'\delta_1\big)(\omega_2) = \left(T\big(g'\delta_0\big) + \sum_{p+1}^{i=2}(-1)^i T\big(g'\delta_i\big)\right)(\omega_2).$$

On a $g'\delta_0 = g_{n,p}$. Donc

$$\begin{aligned} k_\alpha(\omega_1\omega_2) &= \varepsilon_\alpha e_{n+p}\big(T(f_{n,p})T\big(\alpha^{-1}\big)(\omega_1)T(g_{n,p})(\omega_2)\big) \\ &\quad + \sum_{p+1}^{i=2}(-1)^i \varepsilon_\alpha e_{n+p}\big(T(f_{n,p})T\big(\alpha^{-1}\big)(\omega_1)T\big(g'\delta_i\big)(\omega_2)\big). \end{aligned}$$

On a l'égalité $g'\delta_i = \delta_{i+n-1}g''$ où $g'' : [p] \longrightarrow [n+p-1]$ est définie de la même façon que g'. Pour tout $i \geqslant 2$, on a donc

$$e_{n+p}\big(T(f_{n,p})T\big(\alpha^{-1}\big)(\omega_1)T\big(g'\delta_i\big)(\omega_2)\big) = e_{n+p}T(\delta_{i+n-1})\big(T(f_{n,p-1})T\big(\alpha^{-1}\big)(\omega_1)T\big(g''\big)(\omega_2)\big).$$

En utilisant le lemme 3.5, on voit que $e_{n+p}T(\delta_{i+n-1}) = 0$. On aura donc

$$\begin{aligned} k_\alpha(\omega_1\omega_2) &= \varepsilon_\alpha e_{n+p}\big(T(f_{n,p})T\big(\alpha^{-1}\big)(\omega_1)T(g_{n,p})(\omega_2)\big) \\ &= \varepsilon_\alpha T(f_{n,p})\big(e_n T\big(\alpha^{-1}\big)(\omega_1)\big)T(g_{n,p})(\omega_2) \\ &= k_\alpha(\omega_1)\omega_2. \end{aligned}$$

Les identités $b_r(\omega_1\omega_2) = b_r(\omega_1)\omega_2$ et $\kappa_r(\omega_1\omega_2) = \kappa_r(\omega_1)\omega_2$ se démontrent à peu près de la même façon.

Remarquons au passage que sur Ω^n, on a $b_n = b$ et $\kappa_n = \kappa$. □

5. Algebres graduees mixtes

5.1. Definition. Une algèbre graduée mixte est une algèbre différentielle graduée (Λ^*, d), munie d'une deuxième différentielle $b : \Lambda^* \longrightarrow \Lambda^{*-1}$ vérifiant, pour tous $\omega_1 \in \Lambda^n$ et $\omega_2 \in \Lambda^p$, l'identité suivante :

$$\omega_2\omega_1 = (-1)^{np}\kappa^p(\omega_1\omega_2) - (-1)^{n(p+1)}b\kappa^p(\omega_1 d\omega_2).$$

L'opérateur de degré 0 κ étant défini par l'identité

$$db + bd = 1 - \kappa.$$

5.2. Exemple. Pour toute R-algèbre unitaire A, l'algèbre $\Omega^*(A)$ des formes différentielles non commutatives est une algèbre graduée mixte.

5.3. Theoreme. *L'algèbre Ω^* associée à une algèbre graduée avec symétrie T est une algèbre graduée mixte.*

5.4. Demonstration. Pour montrer ce théorème, il faut établir la propriété suivante : Pour tous $\omega_1 \in \Omega^n$ et $\omega_2 \in \Omega^p$, on a

$$\omega_2\omega_1 = (-1)^{np}\kappa^p(\omega_1\omega_2) - (-1)^{n(p+1)}b\kappa^p(\omega_1 d\omega_2).$$

Soient donc $\omega_1 \in \Omega^n$ et $\omega_2 \in \Omega^p$. On a

$$\kappa^p(\omega_1\omega_2) = (-1)^{p(n+p)}\big(T(\alpha_{n+p}) - T(\beta_{n+p})\big)^p\big(T(f_{n,p})(\omega_1)T(g_{n,p})(\omega_2)\big)$$

où α_{n+p} est le cycle $(0\ 1\ 2 \cdots\ n+p)$ et $\beta_{n+p} : [n+p] \longrightarrow [n+p]$ est l'application qui est définie par

$$\beta_{n+p}(i) = \begin{cases} i+1 & \text{si } i < n+p \\ 1 & \text{si } i = n+p. \end{cases}$$

Or on a $\alpha^r_{n+p}\beta^s_{n+p} f = \alpha^p_{n+p} f_{n,p}$ pour tous r et s tels que $r+s=p$ et le morphisme $(\alpha_{n+p} - \beta_{n+p})^p$ est une somme de compositions de α_{n+p} et β_{n+p}. Soit $\beta_{n+p}\alpha_{n+p}\gamma$ un terme de cette somme, γ étant une composition de α_{n+p} et β_{n+p} avec $\gamma(r+n) = p+n$ où $1 \leqslant r \leqslant p-1$. On a alors

$$\beta_{n+p}\alpha_{n+p}\gamma g_{n,p} = \beta_{n+p}\alpha_{n+p}\gamma g_{n,p}\delta_{r-1}s_{r-1}.$$

C'est à dire que

$$T(\beta_{n+p}\alpha_{n+p}\gamma g_{n,p})(\omega_2) = 0.$$

On a donc

$$\kappa^p(\omega_1\omega_2) = (-1)^{p(n+p)} T\big(\alpha^p_{n+p} f_{n,p}\big)(\omega_1)\sum_{i=0}^{p}(-1)^i T\big(\alpha^{p-i}_{n+p}\beta^i_{n+p} g_{n,p}\big)(\omega_2).$$

On a aussi

$$\kappa^p(\omega_1 d\omega_2) = (-1)^{p(n+p+1)} T\big(\alpha^p_{n+p} f_{n,p+1}\big)(\omega_1)\sum_{i=0}^{p}(-1)^i T\big(\alpha^{p-i}_{n+p+1}\beta^i_{n+p+1} g_{n,p+1}\big)(d\omega_2).$$

On a donc

$$\begin{aligned} b\kappa^p(\omega_1 d\omega_2) = {} & (-1)^{(p+1)(n+p+1)} T\big(s_{n+p+1}\alpha^p_{n+p} f_{n,p+1}\big)(\omega_1) \\ & \times \sum_{i=0}^{p}(-1)^i T\big(s_{n+p+1}\alpha^{p-i}_{n+p+1}\beta^i_{n+p+1} g_{n,p+1}\big)(d\omega_2). \end{aligned}$$

Pour tout $i < p$, on a

$$s_{n+p+1}\alpha^{p-i}_{n+p+1}\beta^i_{n+p+1} g_{n,p+1} = s_{n+p+1}\alpha^{p-i}_{n+p+1}\beta^i_{n+p+1} g_{n,p+1}\delta_1 s_1$$

donc

$$b\kappa^p(\omega_1 d\omega_2) = (-1)^{(p+1)(n+p+1)} T\big(s_{n+p+1}\alpha^p_{n+p} f_{n,p+1}\big)(\omega_1)(-1)^p T\big(s_{n+p+1}\beta^p_{n+p+1} g_{n,p+1}\big)(d\omega_2).$$

On a d'une part

$$\alpha^p_{n+p} f_{n,p} = s_{n+p+1}\alpha^p_{n+p} f_{n,p+1} = g_{p,n}$$

et d'autre part

$$T\left(s_{n+p+1}\beta^{p}_{n+p+1}g_{n,p+1}\right)(d\omega_2)=\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i T\left(s_{n+p+1}\beta^{p}_{n+p+1}g_{n,p+1}\delta_i\right)(\omega_2).$$

Or pour tout $i \geqslant 1$, on a

$$s_{n+p+1}\beta^{p}_{n+p+1}g_{n,p+1}\delta_i=\alpha^{i-1}_{n+p}\beta^{p-i+1}_{n+p+1}g_{n,p}$$

donc

$$\begin{aligned} b\kappa^p(\omega_1 d\omega_2) &= (-1)^{n(p+1)+1}T(g_{p,n})(\omega_1)\\ &\quad\times\left(T(s_{n+p+1}\beta_{n+p+1}g_{n,p+1}\delta_0)+\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i T\left(\alpha^{i-1}_{n+p}\beta^{p-i+1}_{n+p+1}g_{n,p}\right)\right)(\omega_2)\\ &= (-1)^n\kappa^p(\omega_1\omega_2)+(-1)^{n(p+1)+1}T(g_{p,n})(\omega_1)T(s_{n+p+1}\beta_{n+p+1}g_{n,p+1}\delta_0)(\omega_2). \end{aligned}$$

Mais $s_{n+p+1}\beta_{n+p+1}g_{n,p+1}\delta_0$ n'est autre que $f_{p,n}$ et on aura donc

$$\begin{aligned} b\kappa^p(\omega_1 d\omega_2) &= (-1)^n\kappa^p(\omega_1\omega_2)+(-1)^{n(p+1)+1}T(g_{p,n})(\omega_1)T(f_{p,n})(\omega_2)\\ &= (-1)^n\kappa^p(\omega_1\omega_2)+(-1)^{n(p+1)+1}\omega_2\omega_1. \end{aligned}$$

D'où l'identité recherchée.

En particulier si $d\omega_2=0$, on aura $(-1)^{np}\kappa^p(\omega_1\omega_2)=\omega_2\omega_1$. $\square$

Références

[1] N. Battikh, Cup i-produits sur les formes différentielles non commutatives et carrés de Steenrod, J. Algebra 313 (2007) 531–553.

[2] A. Connes, Noncommutative differential geometry, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 62 (1985) 257–360.

[3] J. Cuntz, D. Quillen, Operators on noncommutative differential forms and cyclic homology, in : Geometry, Topology and Physics for Raoul Bott, International Press, Cambridge, MA, 1995.

[4] A. Dold, R. Thom, Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 242 (1956) 1680–1682.

[5] M. Karoubi, Homologie cyclique et K-théorie, Astérisque 149 (1987).

[6] M. Karoubi, Formes topologiques non commutatives, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. 28 (1995) 477–492.

[7] M. Karoubi, Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 4277–4299.

[8] J.-L. Loday, Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives, Invent. Math. 96 (1989) 205–230.

[9] J.L. Loday, La renaissance des opérades, Séminaire N. Bourbaki, 1994-1995, exp. n° 792, pp. 47–74.

[10] N.E. Steenrod, D.B.A. Epstein, Cohomology Operations, Ann. of Math. Stud., Princeton University Press, 1962.